

6. Übung zur Elementaren Stochastik

Prof. Dr. Ehrhard Behrends, WS 2009/10

Ausgabe: 16. 11. 2009

Abgabe: am 24. 11. 2009 bis 16.00 Uhr in den Fächern der Tutoren

Bei einigen Aufgaben gibt es eine *-Version. Die ist für die ambitionierteren Übungsteilnehmer gedacht. Das gilt auch für die **-Aufgaben, bei denen wird unter den richtigen Lösungen auch ein Preis verlost. Bitte für jedes n auf dem gleichen Zettel höchstens eine der Aufgaben n , n^* , n^{**} bearbeiten, $n = 1, 2, 3, 4$!

1. Der Raum $\Omega = \{1, \dots, 101\}$ sei mit der Gleichverteilung versehen. Man beweise: Sind $A, B \subset \Omega$ unabhängig, so ist eine der beiden Mengen leer oder ganz Omega.

1*. Es sei $n \in \mathbb{N}, n > 1$. Der Raum $\Omega = \{1, \dots, n\}$ sei mit der Gleichverteilung versehen. Zeigen Sie, dass n genau dann eine Primzahl ist, wenn gilt: Sind $A, B \subset \Omega$ unabhängig, so ist eine der beiden Mengen leer oder ganz Omega.

2. N_0 sei mit der Poissonverteilung zu einem (unbekannten) Parameter λ versehen. Der Zufall wird einmal abgefragt, das Ergebnis sei k_0 . Finden Sie einen maximum-likelihood-Schätzer für den Parameter λ .

3. Sei σ eine Zufallspermutation der Zahlen $1, \dots, n$. Es geht um die Wahrscheinlichkeit, dass in σ eine gewisse Anzahl von Elementen festbleibt.

a) Finden Sie einen expliziten Ausdruck für die Anzahl der σ , in denen genau ein Element festbleibt und schließen Sie daraus auf die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis. (Das Ergebnis folgt aus den Rechnungen auf Seite 65.)

b) Begründen Sie, warum dieser Ausdruck für große n durch $1/e$ approximiert werden kann.

c) Berechnen Sie mit Hilfe der gefundenen Formeln die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Elemente fest bleiben (exakt und approximativ unter Verwendung der e -Reihe). Wie groß ist dieser Wert in Prozent?

d) Zeigen Sie allgemeiner: Die Wahrscheinlichkeit, dass genau r Elemente fest bleiben, kann für genügend große n durch $1/(r!e)$ approximiert werden. (Das ist ein freiwilliger Zusatz, der bei erfolgreicher Bearbeitung zwei Extra-Punkte bringt.)

4. Betrachtet wird $\Omega = [0, 1]$, das Wahrscheinlichkeitsmaß sei durch die Dichte $f(x) = 2x$ gegeben. Bestimmen Sie alle $t \in [0, 1]$, so dass $[0, t]$ und $[0.25, 0.75]$ unabhängig sind.

Für den mathematischen „Arbeitsspeicher“ ...

Auf die folgenden Fragen sollte man jederzeit eine richtige Antwort geben können.

Was ist eine σ -Algebra? Wie ist die σ -Algebra der Borelmengen definiert? Was ist ein Wahrscheinlichkeitsraum? Wie kann man einen Wahrscheinlichkeitsraum einfach definieren, wenn Ω höchstens abzählbar ist? Was versteht man unter a) der Gleichverteilung auf $\{1, \dots, n\}$, b) einem Laplaceraum, c) der Bernoulli-verteilung, e) der Poissonverteilung, f) der geometrischen Verteilung? Wie kann man auf einem Intervall, versehen mit der σ -Algebra der Borelmengen, einen Wahrscheinlichkeitsraum mit Hilfe einer Dichtefunktion definieren? Was versteht man unter a) Gleichverteilung, b) Exponentialverteilung, c) Normalverteilung? Was wird mit dem Buffonschen Nadelexperiment approximativ berechnet? Was ist eine Zufallsvariable? Wie ist der durch eine Zufallsvariable induzierte Wahrscheinlichkeitsraum definiert? Wie ist der Erwartungswert einer Zufallsvariablen im Fall diskreter Räume und bei Räumen mit Dichte definiert? Was sind Varianz und Streuung? **Neu:** Wie viele Möglichkeiten gibt es, k Elemente aus einer n -elementigen Menge auszuwählen? In welchen Fällen verwendet man die hypergeometrische Verteilung? Was ist eine maximum-likelihood-Schätzung? **Neu:** Was ist das Übereinstimmungs-Paradoxon? Was versteht man unter „bedingter Wahrscheinlichkeit“? Wann heißen zwei Ereignisse unabhängig?

... und hier noch Beispiele aus den „Arbeitsspeichern“ anderer Teilbereiche der Mathematik:

Ist $\mathcal{E}$ ein Mengensystem, d.h. eine Teilmenge der Potenzmenge einer Menge M , wie ist dann $\bigcup_{E \in \mathcal{E}} E$ definiert? Und wie $\bigcap_{E \in \mathcal{E}} E$? Was ist eine offene, was eine abgeschlossene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$? Was besagt der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung? Was ist eine stetige Funktion? Was versteht man unter dem Zwischenwertsatz? Was ist $f^{-1}(A)$, wie ist die inverse Abbildung f^{-1} definiert (falls sie existiert)? Was heißt Konvergenz für Folgen und Reihen. Was ist eine absolut konvergente Reihe? Warum ist dieser Begriff für die Stochastik wichtig? **Neu:**

Stochastik am Computer: Anregungen

Viele Definitionen, Ergebnisse und Verfahren sind besser zu verstehen, wenn man zur Illustration Computer-Simulationen zur Verfügung hat. Es wird empfohlen, sich solche Simulationen selbst zu schreiben, viele Routinen findet man schon vorgefertigt in den meisten Programmpaketen.

Unterprogramme: Zufallszahlen erzeugen können (Laplace, Binomial, Poisson, geometrisch, Exponentialverteilung, Normalverteilung, ...); Häufigkeitsverteilungen skizzieren können (so genannte Histogramme).

Neu: Monte-Carlo-Verfahren zur approximativen Integration.

Projekte: Test des Zufallszahlengenerators (etwa einige Millionen gleichverteilte Zufallszahlen in $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ erzeugen und prüfen, ob alle Ergebnisse in etwa gleich oft vorkommen); einige Millionen Poissonverteilte Zufallszahlen erzeugen und ein Histogramm erstellen, ... **Neu:** Integrale ausrechnen mit Monte-Carlo-Verfahren und Güte-Test durch Vergleich mit dem exakten Ergebnis;